

**Vysoké učení technické v Brně**  
**Fakulta stavební**

Studentská vědecká a odborná činnost  
Akademický rok 2011/2012

# **Teoretické základy jedno-** **zrcadlových a dvou-zrcadlových** **optických skenerů**

Jméno a příjmení studenta, ročník, obor: Petr Pokorný, 4., Geodézie  
a kartografie  
Vedoucí práce: Prof. RNDr. A. Mikš, CSc.  
Katedra / Ústav: Katedra fyziky / FSv ČVUT  
v Praze

## Obsah

Abstrakt .....	3
Abstract .....	3
1 Úvod .....	4
2 Současné komerčně dostupné 3D skenery .....	4
3 Optické systémy 3D skenerů .....	5
4 Průchod paprsku optickým systémem .....	7
5 Dvou-zrcadlové skenery .....	9
6 Jedno-zrcadlové skenery .....	11
7 Aplikace .....	13
7.1 Příklad 1 – dvou-zrcadlový skener .....	13
7.2 Příklad 2 – dvou-zrcadlový skener .....	15
7.3 Příklad 3 – jedno-zrcadlový skener .....	17
8 Závěr .....	19
Literatura .....	20

## **Abstrakt**

V práci je provedena analýza optických systémů jedno-zrcadlových a dvou-zrcadlových 3D optických skenerů, představeny současné komerčně dostupné modely, jsou odvozeny vztahy umožňující provést návrh obou typů skenerů v obecném případě, tyto vztahy poté demonstrovány na konkrétních příkladech.

## **Abstract**

The paper gives an analysis of optical systems of one-mirror and two-mirror 3D optical scanners, a commercially available models are introduced, there are derived relations allowing to design both types of scanners in the general case, these relations are then demonstrated on concrete examples.

# 1 Úvod

3D (třírozměrné) optické skenery [1-13] jsou přístroje umožňující provádět bezkontaktní, velmi rychlé a přesné měření třírozměrných objektů. Oblastmi aplikace 3D optických skenerů jsou např. stavebnictví a architektura, interiéry, výkopové zemní práce (základy budov, měření kubatur, tunely, kanalizace, těžba surovin apod.), 3D dokumentace uměleckých předmětů a kulturních památek (sochy, porcelán, nábytek apod.), součástky a moduly ve strojírenství, tvary karosérií automobilů, stav silničních vozovek, železničních tratí, detekce a dokumentace trhlin, vodohospodářství, bezpečnost a kontrola silničního provozu (laserové brány), archeologie atd. [3]. Dále nacházejí tyto systémy široké uplatnění v bezpečnostní technice jako např. při ochraně objektů, detekci přítomnosti člověka v bezpečnostních zónách výrobních systémů (např. obráběcích centrech, hutích apod.). Další oblastí široké aplikace 3D skenerů jsou laserové technologie (řezání, svařování, gravírování, povrchové zušlechťování materiálů apod.), medicína a zábavný průmysl (laserové efekty, divadla) [10,11]. Existuje celá řada firem [4-9], které se touto problematikou zabývají a komerčně nabízejí 3D skenery pro výše uvedené aplikace.

## 2 Současné komerčně dostupné 3D skenery

V této části je uvedeno několik příkladů současných špičkových 3D skenerů, které jsou komerčně dostupné na trhu. Další informace je možné dohledat na internetových stránkách jednotlivých výrobců [3-9].

**Tabulka 1** Parametry skenerů

název	typ	<i>zorné pole</i>	<i>dosah</i>	<i>rychlost</i>	<i>přesnost</i>	
		[°]	[m]	body/s	délková	úhlová
Surphaser® 25HSX	jedno- zrcadlový	360 x 270	70	216 tis. až 1,2 mil.	0,2 mm – 3 mm	
Leica ScanStation C10	jedno- zrcadlový	360 x 270	300	50 tis.	4 mm/50 m	12" x 12"
Topcon GLS-1500	jedno- zrcadlový	360 x 70	330	30 tis.	4 mm/150 m	6" x 6"
RIEGL VZ- 1000	jedno- zrcadlový (polygon)	360 x 100	1400	122 tis.	8 mm	29"
FARO Focus <sup>3D</sup>	jedno- zrcadlový	360 x 305	120	976 tis.	2 mm/25 m	



**Obr. 1** Surphaser® 25HSX, Leica ScanStation C10, Topcon GLS-1500, RIEGL VZ-1000, FARO Focus<sup>3D</sup>

### 3 Optické systémy 3D skenerů

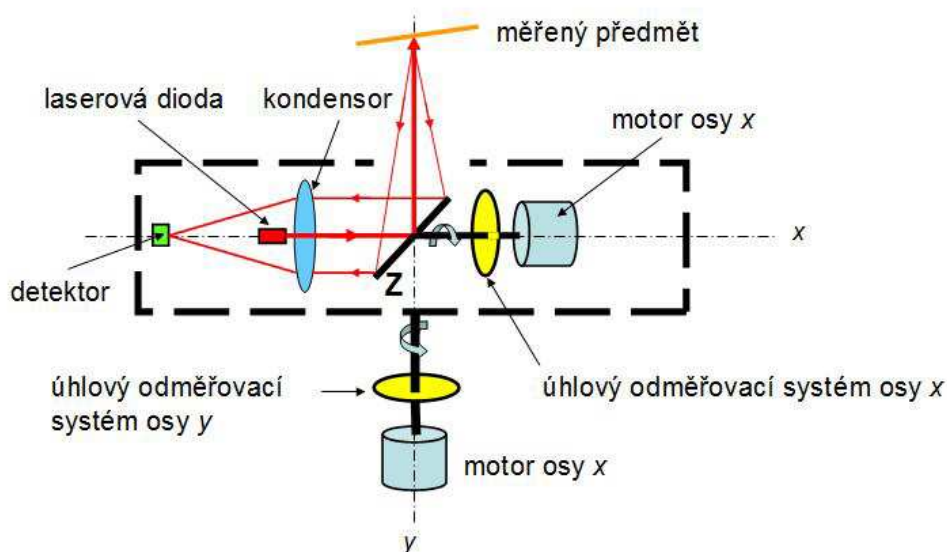
3D optický skener se skládá ze zdroje záření, rozmítacího optického nebo opticko-mechanického systému, detektoru záření a vyhodnocovacího systému. Světlo vycházející ze zdroje záření je pomocí rozmítacího systému odchýleno do přesně určeného směru a dopadá na měřený předmět. Po odraze od měřeného předmětu se část světla (rozptýleného předmětem) vrací zpět, opět prochází rozmítacím systémem a dopadá na detektor záření. Vyhodnocovací systém potom určí prostorové souřadnice bodu předmětu. Vzdálenost bodu měřeného předmětu od skeneru pak nejčastěji určujeme buď pomocí modulace světelného signálu vyslaného skenerem, nebo změřením času, který uplyne mezi vysláním a zpětným přijmutím signálu (metoda TOF "time of flight"). Existují i další způsoby určení vzdálenosti měřeného předmětu od skeneru, např. triangulační [13], ale tyto se používají v menší míře a proto se jimi zde nebudeme zabývat.

Optické 3D skenery jsou nejčastěji založeny buď na *jedno-zrcadlovém* nebo *dvou-zrcadlovém* optickém systému pro rozmítání světelného svazku.

*Jedno-zrcadlové skenery* jsou používány tam, kde je zapotřebí dosáhnout většího úhlového rozsahu (zorného pole) rozmítaného světelného svazku. Jedno-zrcadlový skener (**obr. 2**) je nejčastěji tvořen laserovým modulem s jedním rotačním zrcadlem, které se otáčí kolem vodorovné (horizontální - H) osy a rozmítá laserový svazek v rovině kolmé k ose otáčení zrcadla (vertikální rovina). Tento laserový modul se pak otáčí kolem svislé (vertikální - V) osy, kolmé na osu otáčení zrcadla, čímž dochází k rozmítání laserového svazku ve vodorovné (horizontální) rovině. Dosažitelné zorné pole může být např.  $360^\circ \times 320^\circ$  (H x V).

*Dvou-zrcadlové skenery* jsou používány zejména v oblasti laserových technologií ve strojírenství a v dalších oblastech, kde není zapotřebí příliš velkého úhlového rozsahu rozmítaného laserového svazku. Optická soustava dvou-zrcadlového skeneru je tvořena dvěma zrcadly, které se otáčejí kolem dvou různých os, a tím dochází k rozmítání laserového svazku. Existuje několik firem, které dodávají již hotové moduly pro dvou-zrcadlové skenery, např. [12]. Dosažitelné zorné pole může být např.  $80^\circ \times 80^\circ$  (H x V).

## Laserový skener



**Obr. 2** Principiální schéma jedno-zrcadlového 3D laserového skeneru

Na **obr. 2** je znázorněno principiální schéma jedno-zrcadlového 3D skeneru sloužícímu k určování souřadnic bodů na měřeném předmětu, např. vzhledem k průsečíku os  $x$  a  $y$  skeneru. Světlo z laserové diody se odráží na otočném zrcadle  $Z$  a dopadá na měřený předmět. Předmět světlo rozptýlí, část světla se vrátí zpět do skeneru a po odraze na zrcadle  $Z$  a po průchodu kondenzorem dopadá na detektor. Vzdálenost předmětu od vztažného bodu se určí pomocí času  $\Delta t$ , který uplyne od vyslání signálu k jeho detekci detektorem (metoda "time of flight"). Je-li  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/s rychlost světla, potom pro vzdálenost  $d$  měřeného bodu předmětu od vztažného bodu platí

$$d = c \frac{\Delta t}{2}. \quad (1)$$

Za dobu  $\tau$  urazí světlo vzdálenost  $L = \tau c$ . Chceme-li určit vzdálenost  $d$  s přesností  $\Delta d$ , potom musíme umět změřit čas s přesností

$$\delta t = \Delta d / c. \quad (2)$$

Je-li např.  $\delta t = 1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ , potom chyba měření bude

$$\Delta d = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 10^{-9} \text{ s} = 30 \text{ cm}.$$

Chceme-li tedy vzdálenost  $d$  určit s přesností  $\Delta d = 5 \text{ cm}$ , musíme umět změřit čas s přesností

$$\delta t = 0,17 \text{ ns} = 0,17 \cdot 10^{-9} \text{ s} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ s}.$$

Měření pomocí skeneru na **obr. 2** pak probíhá tím způsobem, že laserová dioda vysílá sled pulsů a měří se čas, který uběhne mezi vysláním pulsu a jeho zpětnou detekcí detektorem. Zrcadlo se přitom otáčí kolem osy  $x$  a zároveň se kolem osy  $y$  otáčí horní část skeneru (na **obr. 2** je to čárkovaný box). Úhlové odměřovací systémy na ose  $x$  a ose  $y$  nám udávají směrové úhly  $\alpha_x$  a  $\alpha_y$  paprsku vyslaného směrem k měřenému předmětu. Známe-li tedy tyto úhly a čas  $\Delta t$ , potom můžeme snadno vypočítat souřadnice "bodu" předmětu, na který paprsek světla, vyslaný skenerem, dopadl.

Přesnost  $\Delta\alpha_x$  a  $\Delta\alpha_y$ , s jakou musíme určit směrové úhly  $\alpha_x$  a  $\alpha_y$ , určíme z podmínky, aby chyba souřadnic měřeného bodu byla v námi požadovaných mezích. Je-li  $D$  vzdálenost měřeného bodu od skeneru, potom platí

$$\Delta\alpha_x = dx/D, \quad \Delta\alpha_y = dy/D. \quad (3)$$

Volíme-li  $D = 50 \text{ m} = 5000 \text{ cm}$  a požadujeme-li  $dx = dy = 5 \text{ cm}$ , potom dostáváme

$$\Delta\alpha_x = \Delta\alpha_y = 0,001 \text{ rad} = 3,3'.$$

Tím máme určeny základní vztahy a hodnoty nutné pro návrh skeneru.

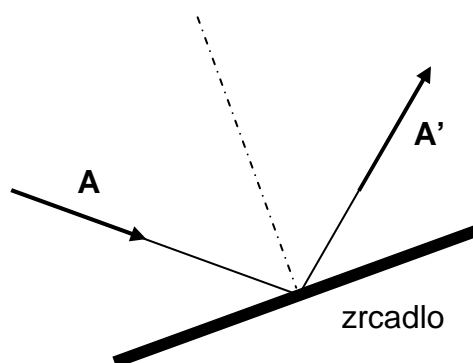
#### 4 Průchod paprsku optickým systémem

Pro odraz paprsku majícího jednotkový směrový vektor  $\mathbf{A}$  od zrcadla majícího jednotkový směrový vektor normály  $\mathbf{N}$  směřující k dopadajícímu paprsku platí (**obr. 3**) [16, 17]

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - 2\mathbf{N}(\mathbf{A}\mathbf{N}) = \mathbf{M}\mathbf{A}, \quad (4)$$

kde  $\mathbf{A}'$  je jednotkový vektor paprsku odraženého od zrcadla a  $(\mathbf{A}\mathbf{N})$  značí skalární součin vektorů. Pro matici  $\mathbf{M}$  a vektory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}'$  a  $\mathbf{N}$  platí

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - 2N_x^2 & -2N_xN_y & -2N_xN_z \\ -2N_xN_y & 1 - 2N_y^2 & -2N_yN_z \\ -2N_xN_z & -2N_yN_z & 1 - 2N_z^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} \quad (5)$$



**Obr. 3** Odraz od rovinného zrcadla

Při odraze na  $k$  zrcadlech pak opakovaným použitím vztahu (4) dostáváme

$$\mathbf{A}^k = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & 2(\mathbf{A}\mathbf{N}_1) & 2(\mathbf{A}\mathbf{N}_2) & \dots & \dots & 2(\mathbf{A}\mathbf{N}_k) \\ \mathbf{N}_1 & 1 & 2(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) & \dots & \dots & 2(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_k) \\ \mathbf{N}_2 & 0 & 1 & 2(\mathbf{N}_2\mathbf{N}_3) & \dots & 2(\mathbf{N}_2\mathbf{N}_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{N}_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

kde  $\mathbf{A}^k$  je jednotkový vektor paprsku odraženého od soustavy  $k$  zrcadel.

Pro v praxi nejčastěji používanou soustavu dvou zrcadel ze vztahu (6) dostáváme

$$\mathbf{A}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & 2(\mathbf{A}\mathbf{N}_1) & 2(\mathbf{A}\mathbf{N}_2) \\ \mathbf{N}_1 & 1 & 2(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) \\ \mathbf{N}_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{A} - 2\mathbf{N}_1(\mathbf{A}\mathbf{N}_1) - 2\mathbf{N}_2(\mathbf{A}\mathbf{N}_2) + 4\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)(\mathbf{A}\mathbf{N}_1) \quad (7)$$

Otáčíme-li nyní zrcadlem kolem nějaké osy, bude se směr odraženého paprsku měnit v závislosti na úhlu otočení zrcadla a na směru osy, kolem které se zrcadlo otáčí. Bude se tedy při otáčení zrcadla měnit směr jednotkového vektoru normály  $\mathbf{N}$  zrcadla.

Uvažujme nyní *otočení vektoru  $\mathbf{N}$  kolem osy*, dané jednotkovým směrovým vektorem  $\mathbf{C}$  procházejícím počátkem souřadné soustavy, o úhel  $\varphi$ . Jak je známo z matematiky [14], platí pro vektor  $\mathbf{N}(\varphi)$ , vzniklý otočením vektoru  $\mathbf{N}$  o úhel  $\varphi$  kolem osy dané jednotkovým směrovým vektorem  $\mathbf{C}$ , následující vztah

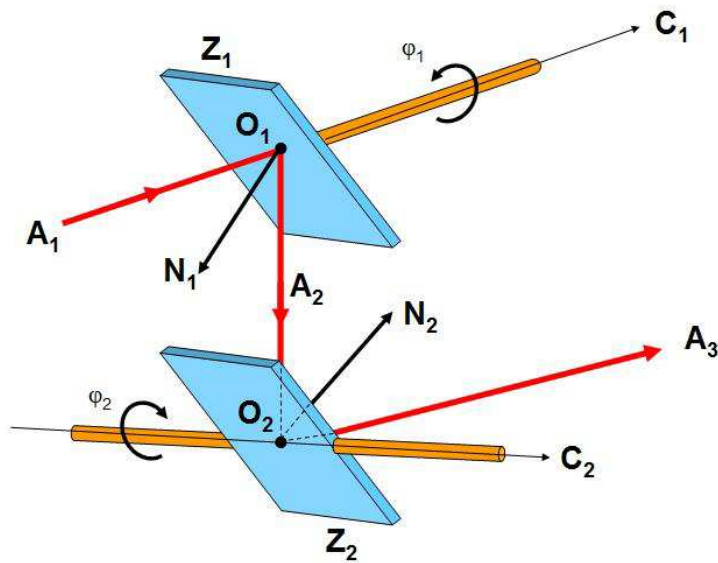
$$\mathbf{N}(\varphi) = \mathbf{N}\cos\varphi + \mathbf{C}(\mathbf{C}\mathbf{N})(1 - \cos\varphi) + (\mathbf{C}\times\mathbf{N})\sin\varphi. \quad (8)$$

Pro *nekonečně malé otočení*  $d\varphi$  ( $\cos d\varphi \approx 1$ ,  $\sin d\varphi \approx d\varphi$ ) pak platí

$$\mathbf{N}(d\varphi) = \mathbf{N} + (\mathbf{C}\times\mathbf{N})d\varphi. \quad (9)$$

Při rotaci zrcadla Z skeneru na **obr. 2** se vektor  $\mathbf{N}$  jeho normály bude transformovat podle vztahu (8). Podle vztahu (9) se pak určí vliv chyb os rotace na chybu skeneru.





Obr. 4 Soustava dvou zrcadel

## 5 Dvou-zrcadlové skenery

Na prvním místě si uvedeme tyto skenery, protože v praxi se pro přesná měření využívají nejvíce a jedno-zrcadlové jsou, co se týče popisu průchodu paprsku, zjednodušeným případem dvou-zrcadlových skenerů.

Uvažujme tedy *soustavu dvou rovinných zrcadel*  $Z_1$  a  $Z_2$  znázorněnou na **obr. 4**. Předpokládejme, že zrcadlo  $Z_1$  prochází bodem  $O_1$  a otáčí se kolem osy mající jednotkový směrový vektor  $\mathbf{C}_1$  a zrcadlo  $Z_2$  prochází bodem  $O_2$  a otáčí se kolem osy mající jednotkový směrový vektor  $\mathbf{C}_2$ . Dále necht'  $\mathbf{N}_1$  a  $\mathbf{N}_2$  jsou jednotkové vektory normál k zrcadlům  $Z_1$  a  $Z_2$  a  $\mathbf{A}_1$  je jednotkový směrový vektor paprsku dopadajícího na zrcadlo  $Z_1$ ,  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}'_1$  je jednotkový směrový vektor paprsku odraženého od zrcadla  $Z_1$  a dopadajícího na zrcadlo  $Z_2$  a  $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}'_2$  je jednotkový směrový vektor paprsku odraženého od zrcadla  $Z_2$ .

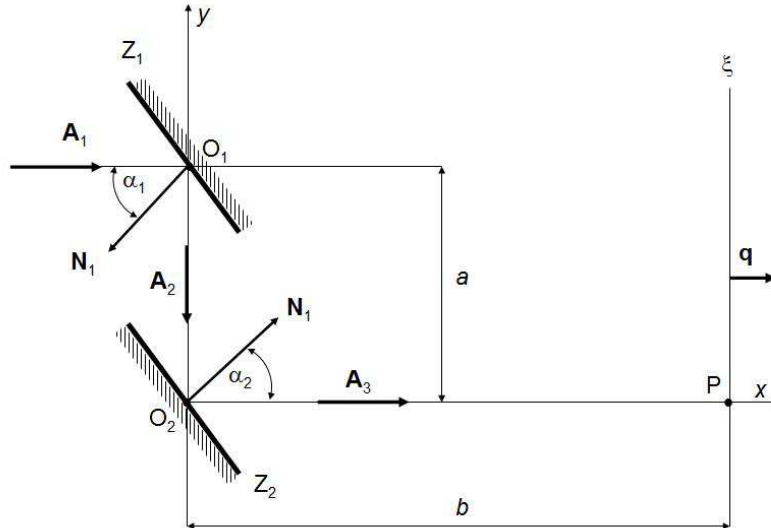
Otočíme-li nyní zrcadlo  $Z_1$  o úhel  $\varphi_1$  kolem osy mající jednotkový směrový vektor  $\mathbf{C}_1$  a zrcadlo  $Z_2$  kolem osy mající jednotkový směrový vektor  $\mathbf{C}_2$  o úhel  $\varphi_2$  vzhledem k jejich základním polohám, potom bude, podle vztahu (8), platit

$$\mathbf{N}_i(\varphi_i) = \mathbf{N}_i(0) \cos \varphi_i + \mathbf{C}_i (\mathbf{C}_i \mathbf{N}_i(0)) (1 - \cos \varphi_i) + [\mathbf{C}_i \times \mathbf{N}_i(0)] \sin \varphi_i, \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

Pro jednotkové směrové vektory  $\mathbf{A}_i(\varphi)$  pak bude, podle vztahu (4), platit

$$\mathbf{A}_{i+1}(\varphi_i) = \mathbf{A}_i(\varphi_i) - 2\mathbf{N}_i(\varphi_i)(\mathbf{A}_i(\varphi_i)\mathbf{N}_i(\varphi_i)), \quad (11)$$

kde  $\mathbf{A}_1(\varphi_1) = \mathbf{A}_1(0)$  je směrový vektor paprsku dopadajícího na zrcadlo  $Z_1$ .



**Obr. 5** Soustava dvou zrcadel v rovině  $(x,y)$

Hledejme nyní souřadnice průsečíku paprsku, vystupujícího ze soustavy zrcadel  $Z_1$  a  $Z_2$ , s rovinou  $\xi$  (**obr. 5**). Jednotkové vektory ve směru souřadných os  $(x, y, z)$  nechť jsou  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Osy  $x$  a  $y$  leží v rovině **obr. 5** a osa  $z$  je kolmá na tuto rovinu. Budeme říkat, že zrcadlový systém je v *základní poloze*, budou-li vektory  $\mathbf{A}_1$  a  $\mathbf{A}_3$  ležet v navzájem rovnoběžných rovinách. Vektory příslušející základní poloze budeme značit  $\mathbf{A}_1(0)$ ,  $\mathbf{A}_2(0)$ ,  $\mathbf{A}_3(0)$ ,  $\mathbf{N}_1(0)$  a  $\mathbf{N}_2(0)$ . Paprsek vycházející ze zrcadlové soustavy v základní poloze pak protíná rovinu  $\xi$ , která se nachází ve vzdálenosti  $b$  od bodu  $O_2$ , v bodě  $P$ . Body  $O_1$  a  $O_2$  jsou od sebe vzdáleny o hodnotu  $a$ . Pro směrový vektor  $\mathbf{A}_2(\varphi_1)$  paprsku odraženého od zrcadla  $Z_1$  v bodě  $O_1$  podle vztahu (11) platí

$$\mathbf{A}_2(\varphi_1) = \mathbf{A}_1(0) - 2\mathbf{N}_1(\varphi_1)(\mathbf{A}_1(0)\mathbf{N}_1(\varphi_1)), \quad (12)$$

kde vektor  $\mathbf{N}_1(\varphi_1)$  je dán vztahem (10). Nyní si určíme průsečík tohoto paprsku se zrcadlem  $Z_2$ . Jako počátek souřadné soustavy volme bod  $O_2$ . Jak je známo z matematiky [15], bude parametrická rovnice paprsku odraženého od zrcadla  $Z_1$  v bodě  $O_1$  dána vztahem

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O_1} + p_2 \mathbf{A}_2(\varphi_1), \quad (13)$$

kde  $\mathbf{r}$  je obecný bod paprsku,  $\mathbf{r}_{O_1} = a\mathbf{j}$  je polohový vektor bodu  $O_1$  a  $p_2$  je parametr. Rovnice zrcadla  $Z_2$  (rovnice roviny procházející bodem  $O_2$ ) je dána vztahem

$$(\mathbf{r}\mathbf{N}_2(\varphi_2)) = 0. \quad (14)$$

Dosazením vztahu (13) do vztahu (14) dostáváme pro parametr  $p_2$  následující vztah

$$p_2 = -a \frac{(\mathbf{j}\mathbf{N}_2(\varphi_2))}{(\mathbf{A}_2(\varphi_1)\mathbf{N}_2(\varphi_2))}.$$

Pro polohový vektor  $\mathbf{r}_2$  průsečíku paprsku se zrcadlem  $Z_2$  pak podle vztahu (13) platí

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{a}\mathbf{j} + \rho_2 \mathbf{A}_2(\varphi_1) = \mathbf{a}\mathbf{j} - a \frac{(\mathbf{j}\mathbf{N}_2(\varphi_2))}{(\mathbf{A}_2(\varphi_1)\mathbf{N}_2(\varphi_2))} \mathbf{A}_2(\varphi_1). \quad (15)$$

Hledejme nyní polohový vektor  $\mathbf{r}$  obecného bodu na paprsku odraženém od zrcadla  $Z_2$ , platí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \rho_3 \mathbf{A}_3(\varphi_2). \quad (16)$$

Rovnice roviny  $\xi$  je dána vztahem

$$\xi \equiv ((\mathbf{r} - b\mathbf{q})\mathbf{q}) = 0, \quad (17)$$

kde  $\mathbf{q}$  je jednotkový vektor normály k rovině  $\xi$  a  $\mathbf{r}$  je polohový vektor obecného bodu roviny  $\xi$ . Pro polohový vektor průsečíku P paprsku odraženého od zrcadla  $Z_2$  s rovinou  $\xi$  potom platí

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + \rho_3 \mathbf{A}_3(\varphi_2). \quad (18)$$

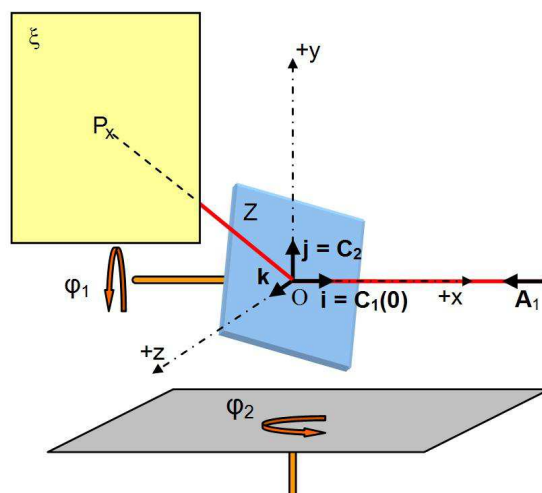
Parametr  $\rho_3$  získáme dosazením vztahu (16) do vztahu (17), směrový vektor  $\mathbf{A}_3(\varphi_2)$  určíme ze vztahu (11) a vektor  $\mathbf{N}_2(\varphi_2)$  určíme ze vztahu (10). Potom platí

$$\rho_3 = \frac{b + (\mathbf{r}_2\mathbf{q})}{(\mathbf{A}_3(\varphi_2)\mathbf{q})},$$

$$\mathbf{A}_3(\varphi_2) = \mathbf{A}_2(\varphi_1) - 2\mathbf{N}_2(\varphi_2)(\mathbf{A}_2(\varphi_1)\mathbf{N}_2(\varphi_2)).$$

## 6 Jedno-zrcadlové skenery

Tyto skenery se zejména pro jejich velký úhlový rozsah (viz Tabulka 1) využívají především v mapování, dokumentaci památkových objektů apod.



Obr. 6 Jedno-zrcadlový skener

Pro popsání průchodu paprsku uvažujme nejdříve rotaci zrcadla kolem vektoru  $\mathbf{C}_1$  o úhel  $\varphi_1$  (pokud je úhel otočení celého skeneru  $\varphi_2 = 0$ , platí  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{i}$ ). Pro otočení jednotkového normálového vektoru zrcadla dle (8) dostáváme

$$\mathbf{N}(\varphi_1) = \mathbf{N}(0) \cos \varphi_1 + \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1 \mathbf{N}(0)) (1 - \cos \varphi_1) + (\mathbf{C}_1 \times \mathbf{N}(0)) \sin \varphi_1. \quad (19)$$

Pro jednotkový vektor odraženého paprsku od natočeného zrcadla bude podle (4) platit

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - 2\mathbf{N}(\varphi_1)(\mathbf{A}_1 \mathbf{N}(\varphi_1)). \quad (20)$$

Jelikož se otáčí dále celý skener o úhel  $\varphi_2$ , bude pro výsledný jednotkový vektor paprsku  $\mathbf{A}_3$  platit

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 \cos \varphi_2 + \mathbf{C}_2 (\mathbf{C}_2 \mathbf{A}_2) (1 - \cos \varphi_2) + (\mathbf{C}_2 \times \mathbf{A}_2) \sin \varphi_2,$$

nebo

$$\mathbf{A}_3^T = \mathbf{R}_y(\varphi_2) \mathbf{A}_2^T, \quad (21)$$

kde  $\mathbf{R}_y(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}$  je matice rotace kolem osy  $y$  o úhel  $\varphi_2$ .

Chceme-li určit vektor  $\mathbf{r}_p$  průsečíku paprsku s rovinou  $\xi$ , která je dána vztahem (17), bude za podmínky, že k odrazu dochází v počátku soustavy  $(x, y, z)$ , platit

$$\mathbf{r}_p = p \mathbf{A}_3,$$

po dosazení do (17) tedy

$$\mathbf{r}_p = \frac{b}{(\mathbf{A}_3 \mathbf{q})} \mathbf{A}_3, \quad (22)$$

kde  $\mathbf{q}$  je jednotkový vektor normály k rovině  $\xi$  a  $b$  je vzdálenost roviny od počátku.

## 7 Aplikace

V této části budou obecně odvozené výše uvedené vztahy aplikovány na konkrétní příklady.

### 7.1 Příklad 1 – dvou-zrcadlový skener

Uvažujme případ dvou-zrcadlové soustavy s následujícími parametry (**obr. 7**):

$$\mathbf{A}_1(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{k},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ, \quad \mathbf{N}_1(0) = -(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}, \quad \mathbf{N}_2(0) = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{i},$$

$$a = 5 \text{ cm}, \quad b = 100 \text{ cm}.$$

Užitím vztahů (10) a (11) dostáváme

$$\mathbf{N}_1(\varphi_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}\cos\varphi_1 + \mathbf{k}\sin\varphi_1),$$

$$\mathbf{A}_2(\varphi_1) = -(\mathbf{j}\cos\varphi_1 + \mathbf{k}\sin\varphi_1),$$

$$\mathbf{N}_2(\varphi_2) = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}(\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2) + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}}(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2),$$

$$\mathbf{A}_3(\varphi_2) = \mathbf{i}\cos\varphi_1(1 - 2\sin^2\varphi_2) + \mathbf{j}\cos\varphi_1\sin 2\varphi_2 - \mathbf{k}\sin\varphi_1.$$

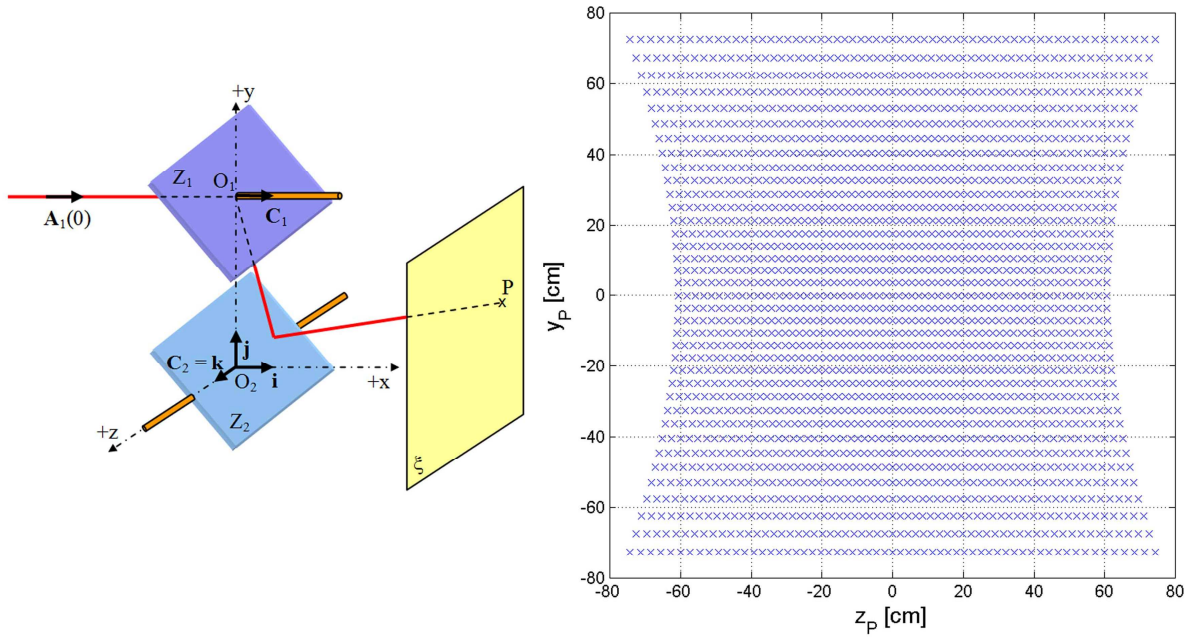
Dosazením do vztahů (15) a (18) dostáváme

$$\mathbf{r}_2 = -a\mathbf{k}\operatorname{tg}\varphi_1,$$

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{i}b + \mathbf{j}\frac{b\sin 2\varphi_2}{1 - 2\sin^2\varphi_2} - \mathbf{k}\operatorname{tg}\varphi_1\left(a + \frac{b}{1 - 2\sin^2\varphi_2}\right). \quad (23)$$

Souřadnice bodu  $P$  na stínítku jsou tedy dány vztahy

$$x_P = b, \quad y_P = \frac{b\sin 2\varphi_2}{1 - 2\sin^2\varphi_2}, \quad z_P = -\operatorname{tg}\varphi_1\left(a + \frac{b}{1 - 2\sin^2\varphi_2}\right). \quad (24)$$



**Obr. 7** Schéma dvou-zrcadlové soustavy a zobrazení bodu P v rovině stínítka pro  $\varphi_1 = \{-30^\circ, -29^\circ, \dots, 29^\circ, 30^\circ\}$ ,  $\varphi_2 = \{-18^\circ, -17^\circ, \dots, 17^\circ, 18^\circ\}$  s parametry z Příkladu 1

Druhý a třetí vztah (24) představují parametrické rovnice křivky v rovině stínítka. Po úpravě pak dostáváme rovnici této křivky v explicitním tvaru, platí

$$z_P = -\left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\sin 2\varphi_2}\right) y_P - a \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (25)$$

Pro malé úhly vychýlení zrcadel potom, rozvojem v Taylorovu řadu, ze vztahů (24) dostáváme

$$y_P \approx 2b\varphi_2 + \frac{8}{3}b\varphi_2^3, \quad z_P \approx -\varphi_1(a+b) - 2b\varphi_1\varphi_2^2, \quad (26)$$

kde jsme se omezili jen na členy do třetích mocnin úhlů vychýlení. Úhly  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  do vztahu (26) dosazujeme v radiánech. Omezíme-li se ve vztazích (26) jen na první členy rozvoje, vidíme, že souřadnice bodu P na stínítku jsou přibližně úměrné úhlům vychýlení zrcadel. Pro *relativní chybu této lineární aproximace* potom ze vztahů (26) dostáváme

$$\frac{\delta y_P}{y_P} \approx \frac{4}{3}\varphi_2^2, \quad \frac{\delta z_P}{z_P} \approx \frac{2}{1+a/b}\varphi_2^2 \approx 2\varphi_2^2, \quad (27)$$

kde jsme předpokládali, že  $a/b \ll 1$ . Např. pro úhel  $\varphi_2 = 10^\circ = 0.17$  rad, je chyba lineární aproximace  $\delta y_P / y_P \approx 4\%$  a  $\delta z_P / z_P \approx 6\%$ .

## 7.2 Příklad 2 – dvou-zrcadlový skener

Uvažujme nyní konkrétní případ dvou-zrcadlové soustavy s následujícími parametry (**obr. 8**):

$$\mathbf{A}_1(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{i},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ, \quad \mathbf{N}_1(0) = -(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}, \quad \mathbf{N}_2(0) = (\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{2}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k},$$

$$a = 5 \text{ cm}, \quad b = 100 \text{ cm}.$$

Obdobným řešením jako v Příkladu 1, užitím (10) a (11), dostáváme

$$\mathbf{N}_1(\varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{i}(\sin \varphi_1 - \cos \varphi_1) - \mathbf{j}(\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1)],$$

$$\mathbf{A}_2(\varphi_1) = \mathbf{i} \sin 2\varphi_1 - \mathbf{j} \cos 2\varphi_1,$$

$$\mathbf{N}_2(\varphi_2) = \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}} (\cos \varphi_2 - \sin \varphi_2) + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}} (\cos \varphi_2 + \sin \varphi_2),$$

$$\mathbf{A}_3(\varphi_2) = \mathbf{i} \sin 2\varphi_1 - \mathbf{j} \cos 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 + \mathbf{k} \cos 2\varphi_1 \cos 2\varphi_2.$$

Dosazením do (15) a (18) poté získáme

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} a \operatorname{tg} 2\varphi_1,$$

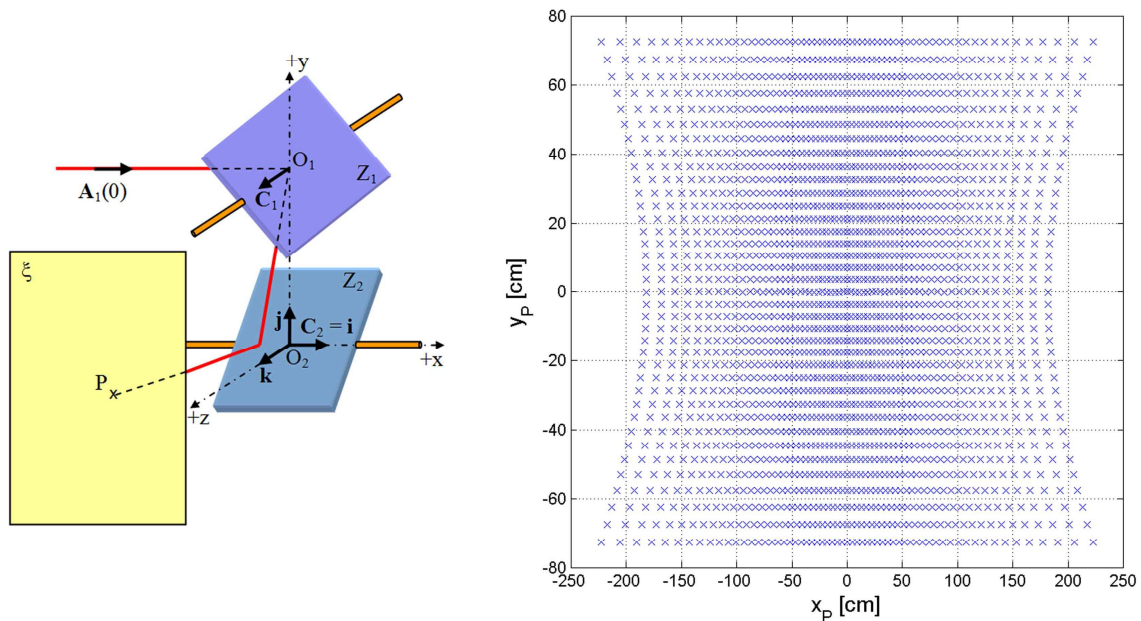
$$\mathbf{r}_P = \mathbf{i} \operatorname{tg} 2\varphi_1 \left( a + \frac{b}{\cos 2\varphi_2} \right) - \mathbf{j} b \operatorname{tg} 2\varphi_2 + \mathbf{k} b. \quad (28)$$

Souřadnice bodu  $P$  na stínítku můžeme tedy vyjádřit vztahy

$$x_P = \operatorname{tg} 2\varphi_1 \left( a + \frac{b}{\cos 2\varphi_2} \right), \quad y_P = -b \operatorname{tg} 2\varphi_2, \quad z_P = b, \quad (29)$$

nebo po úpravě prvních dvou výrazů explicitním vyjádřením křivky v rovině stínítka

$$x_P = -\frac{\operatorname{tg} 2\varphi_1}{\sin 2\varphi_2} y_P + a \operatorname{tg} 2\varphi_1. \quad (30)$$



**Obr. 8** Schéma dvou-zrcadlové soustavy a zobrazení bodu P v rovině stínítka pro  $\varphi_1 = \{-30^\circ, -29^\circ, \dots, 29^\circ, 30^\circ\}$ ,  $\varphi_2 = \{-18^\circ, -17^\circ, \dots, 17^\circ, 18^\circ\}$  s parametry z Příkladu 2

Ze vztahů (29) potom pro malé úhly vychýlení rozvojem v Taylorovu řadu dostáváme

$$\begin{aligned}
 x_P &\approx 2(a+b)\varphi_1 + 4b\varphi_1\varphi_2^2 + \frac{8}{3}(a+b)\varphi_1^3, \\
 y_P &\approx -2b\varphi_2 - \frac{8}{3}b\varphi_2^3,
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

kde jsme se omezili jen na členy do třetích mocnin úhlů vychýlení. Úhly dosazujeme v radiánech. Pro relativní chybu lineární aproximace, kdy uvažujeme pouze první členy vztahů (31), dostáváme

$$\frac{\delta x_P}{x_P} \approx \frac{2}{1+a/b}\varphi_2^2 \approx 2\varphi_2^2, \quad \frac{\delta y_P}{y_P} = \frac{4}{3}\varphi_2^2,
 \tag{32}$$

kde jsme předpokládali, že  $a/b \ll 1$ . Např. pro úhel  $\varphi_2 = 10^\circ = 0.17$  rad, je chyba lineární aproximace  $\delta x_P / x_P \approx 6\%$  a  $\delta y_P / y_P \approx 4\%$ .

Jak je z předcházejících příkladů patrné, mají oba použité typy skenerů stejnou relativní přesnost.



### 7.3 Příklad 3 – jedno-zrcadlový skener

Pro úplnost je zde uveden ještě případ jedno-zrcadlového skeneru s následujícími parametry (**obr. 6**)

$$\mathbf{A}_1 = -\mathbf{i}, \mathbf{C}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{C}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{N}(0) = (\mathbf{i} + \mathbf{k}) / \sqrt{2}, \mathbf{q} = \mathbf{k}, b = 100 \text{ cm.}$$

Užitím (19)-(22) získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= -\mathbf{j} \sin \varphi_1 + \mathbf{k} \cos \varphi_1, \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{i} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \mathbf{j} \sin \varphi_1 + \mathbf{k} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \end{aligned} \quad (33)$$

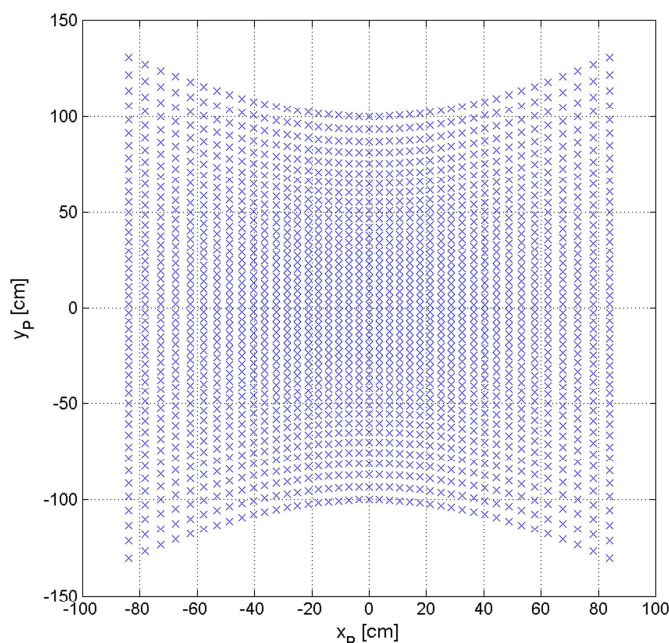
$$\mathbf{r}_P = \mathbf{i} b \tan \varphi_2 - \mathbf{j} b \frac{\tan \varphi_1}{\cos \varphi_2} + \mathbf{k} b.$$

Pro souřadnice bodu  $P$  na stínítku tedy platí

$$x_P = b \tan \varphi_2, \quad y_P = -b \frac{\tan \varphi_1}{\cos \varphi_2}, \quad z_P = b, \quad (34)$$

nebo v explicitním vyjádření křivky v rovině stínítka

$$y_P = -\frac{\tan \varphi_1}{\sin \varphi_2} x_P. \quad (35)$$



**Obr. 9** Zobrazení bodu  $P$  v rovině stínítka pro  $\varphi_1 = \{-45^\circ, -43^\circ, \dots, 43^\circ, 45^\circ\}$ ,  $\varphi_2 = \{-40^\circ, -38^\circ, \dots, 38^\circ, 40^\circ\}$  s parametry z Příkladu 3

Taylorovým rozvojem souřadnic  $x_P$  a  $y_P$ , kde se omezíme pouze na členy do třetích mocnin úhlů vychýlení, získáme

$$x_P \approx b\varphi_2 + \frac{b}{3}\varphi_2^3, \quad y_P \approx -b\varphi_1 - \frac{b}{2}\varphi_1\varphi_2^2 - \frac{b}{3}\varphi_1^3, \quad (36)$$

úhly dosazujeme v radiánech. Uvážíme-li dále pouze lineární členy, bude relativní přesnost této lineární aproximace

$$\frac{\delta x_P}{x_P} = \frac{1}{3}\varphi_2^2, \quad \frac{\delta y_P}{y_P} = \frac{1}{2}\varphi_2^2. \quad (37)$$

Např. pro úhel  $\varphi_2 = 10^\circ = 0.17 \text{ rad}$ , je chyba lineární aproximace  $\delta x_P / x_P \approx 1,0\%$  a  $\delta y_P / y_P \approx 1,4\%$ .

## 8 Závěr

V práci byla provedena analýza 3D optických skenerů a to jedno-zrcadlových a dvou-zrcadlových. Jsou zde odvozeny vztahy umožňující provést návrh obou typů zrcadlových skenerů v obecném případě.

Aplikace odvozených vztahů je demonstrována na dvou příkladech dvou-zrcadlových skenerů a jednoho jedno-zrcadlového, kde je ukázán způsob výpočtu parametrů těchto skenerů a jsou odvozeny vztahy pro výpočet relativních chyb těchto skenerů.

Práce byla vypracována v rámci grantu P102/10/2377 Grantové agentury České republiky.

## Literatura

- [1] MARSHALL, Gerald F. Handbook of optical and laser scanning. New York: Marcel Dekker, c2004, 792 s. Optical engineering (Marcel Dekker, Inc.), v. 90. ISBN 08-247-5569-3.
- [2] VOSELMAN, George a Hans-Gerd MAAS. Airborne and terrestrial laser scanning. 1 edition. CRC Press, 2010. ISBN 978-143-9827-987.
- [3] Control system - Laserové skenování - geodetické práce [online]. 2010 [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://www.controlsystem.cz/>
- [4] Surphaser 3D Scanners [online]. 1995-2011 [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://www.surphaser.com/>
- [5] Home - Leica Geosystems - HDS [online]. 2012 [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://hds.leica-geosystems.com/en/index.htm>
- [6] TOPCON Global Gateway [online]. 1997-2012 [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://global.topcon.com/>
- [7] RIEGL Laser Measurement Systems [online]. 2011 [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://www.riegl.com/>
- [8] FARO Laser Scanner Focus3D [online]. [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://www.faro.com/focus/uk>
- [9] MDL [online]. 2007-2012 [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://www.mdl.co.uk/en/14735.aspx>
- [10] *DJ Obchod.eu - dj technika, světelná a zvuková technika* [online]. [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://www.dj-obchod.eu>
- [11] Sramus.cz - světelná a zvuková technika a efekty, hudební nástroje [online]. [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://www.sramus.cz/>
- [12] Galvos|Scanning Mirrors|Optical Scanners [online]. 2011 [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://www.cambridgetechnology.com/>
- [13] Laser sensors | IR Temperature sensors | High precision displacement and position measurement | Micro-Epsilon Measurement [online]. [cit. 2012-03-11]. Dostupné z: <http://www.micro-epsilon.com/index.html>
- [14] MADELUNG, Erwin. Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. 7. Aufl. Edition. Berlin: Springer, 1964, 247 s.
- [15] REKTORYS, Karel, a spolupracovníci. Přehled užití matematiky. 2. opravené vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1968, 1140 s.
- [16] MIKŠ, Antonín. Aplikovaná optika. Vyd. 1. V Praze: České vysoké učení technické, 2009, 230 s. ISBN 978-80-01-04254-0 (BROŽ.).
- [17] HAVELKA, Bedřich. Geometrická optika I. Praha: NČSAV, 1955.